AHP تکنیکی نوین برای تصمیم‌گیری گروهی[1]

عادل آذر [redacted] دکتر عزیزا... معماریانی

با توجه به محدودیت عقلایی، که هر انسان به تنهایی دچار آن است، شاید همکاری و تشریک مساعی گروهی تنها راه دستیابی به یک سیستم تصمیم‌گیری منطقی، منظم، جامع و کامل باشد. سازمانهای مدرن امروزی چنان وسیع و پیچیده شده‌اند که مدیریت آنها از عهده یک فرد به تنهایی برنمی‌آید و مدیر مجبور است در تصمیم‌گیریها و اداره امور سازمان، از دیگران کمک بگیرد.

پیچیدگی تصمیمات مدیریت باعث خواهد شد که مدیر برای تصمیم‌گیری بهتر، از افراد متعدد و با موقعیتهای شغلی مختلف و تخصصهای گوناگون دعوت به عمل آورد. در جایی که از نظر پست و مقام، تفاوتهایی میان اعضای گروه وجود دارد، احتمال اینکه عضو با نفوذی اعضای دیگر را تحت تسلط و نفوذ خود قرار دهد، بسیار زیاد است. کنش متقابل ارتباطی در یک تصمیم‌گیری گروهی در مقایسه با تصمیم فردی می‌تواند هم موجب افزایش و هم موجب کاهش کیفیت تصمیم گردد. وقتی اعضای یک گروه عملاً رو در روی هم قرار می‌گیرند و به کنش متقابل با هم می‌پردازند، می‌توانند ضمن عیبجویی از همدیگر، دیگران را نیز برای انطباق دادن با خود، تحت فشار قرار دهند. به علاوه موقعیت افرادی که از تخصص بالا و یا از سن و تجربه زیاد برخوردارند به افراد کم تجربه و جوان فرصت ارائه نظر نخواهد داد. یکی دیگر از مشکلات تصمیم‌گیری گروهی، پدیده تکفکری[2] است. این مشکل هنگامی که تأکید بر یکپارچگی و انسجام گروهی، حالت افراطی به خود می‌گیرد و احساس شدید و قوی «مابودن» در آن ایجاد می‌شود به وجود می‌آید.

از روشهای متعددی برای موثر کردن تصمیم‌گیری چون توفان مغزی،[3] روش دلفی[4] و تکینک گروه اسمی[5] استفاده شده است. اگر چه استفاده از این فنون تا حدودی مشکلات تصمیم‌گیریهای گروهی را حل کرده است ولی به کارگیری آنها به جهت زمان و هزینه، خالی از اشکال نیست. به علاوه در دنیای پیچیده و متلاطم امروزی پیچیدگی تصمیمات به حدی است که عملاً استفاده از روشهای ذکر شده غیر ممکن می‌شود و نیاز به یک روش جامع بیش از پیش احساس می‌گردد.

فرایند تحلیل سلسله مراتبی (AHP) یکی از معروفترین فنون تصمیم‌گیری چند منظوره[6] است که اولین بار توسط توماس. ال. ساعتی[7] عراقی الاصل در دهه ۱۹۷۰ ابداع گردید. این روش در هنگامی که عمل تصمیم‌گیری با چند گزینه رقیب[8] و معیار تصمیم‌گیری[9] روبرو است می‌تواند استفاده گردد. معیارهای مطرح شده می‌توانند کمّی و کیفی باشند. اساس این روش تصمیم‌گیری بر مقایسات زوجی[10] نهفته است. تصمیم‌گیرنده با فراهم آوردن درخت سلسله مراتب تصمیم،[11] آغاز می‌کند. درخت سلسله مراتب تصمیم، عوامل مورد مقایسه و گزینه‌های رقیب مورد ارزیابی در تصمیم را نشان می‌دهد. سپس یک سری مقایسات زوجی انجام می‌گیرد. این مقایسات وزن هر یک از فاکتورها را در راستای گزینه‌های رقیب مشخص می‌سازد. در نهایت منطق AHP به گونه‌ای ماتریسهای حاصل از مقایسات زوجی را با همدیگر تلفیق می‌سازد که تصمیم بهینه حاصل آید.

AHP در آغاز برای تصمیم‌گیریهای انفرادی در یک محیط متلاطم و فازی[12] ارائه شد. سپس در دهه هشتاد به چگونگی استفاده از آن در تصمیم‌گیریهای گروهی پرداخته شد. استفاده از AHP در تصمیم‌گیریهای گروهی باعث خواهد شد که نه تنها مزایای فنون تصمیم‌گیری گروهی حفظ شود بلکه معایب آنها (همانند سرعت، هزینه و تکفکری) برطرف شود.

در این مقاله تلاش خواهد شد که به کاربرد AHP در هماهنگ کردن تصمیمات اعضای گروه پرداخته شود. AHP به‌تصمیم‌گیرنده عالی کمک خواهد کرد که به گونه‌ای تصمیمات تمام اعضای گروه را با همدیگر ترکیب کند که تصمیم بهینه در برگیرنده نظریات همه اعضا باشد. در این مقاله مراحل تصمیم‌گیری گروهی به کمک AHP با استفاده از یک مثال تشریح خواهد شد؛ در این مثال فرض خواهد شد که گروه از یک کمیته سه نفره تشکیل می‌شود و مدیریت سازمان می‌خواهد از تصمیمات آنها برای انتخاب یک سیستم کامپیوتری جدید استفاده کند.

ساختن درخت سلسله مراتب تصمیم

هرگاه از AHP به عنوان ابزار تصمیم‌گیری استفاده می‌شود، گروه در آغاز باید یک درخت سلسله مراتب مناسب، که بیان کننده مسأله تحت مطالعه است، فراهم کند. سلسله مراتب تصمیم، درختی است که با توجه به مسأله تحت بررسی دارای سطوح[13] متعدد است. اختصاصاً سطح اول هر درخت بیان کننده هدف[14] تصمیم‌گیری است. سطح آخر هر درخت نیز بیان کننده گزینه‌هایی است که با همدیگر مقایسه می‌شوند و برای انتخاب در رقابت با همدیگر هستند. دیگر سطوح (میانی) نشاندهنده فاکتورهایی است که ملاک مقایسه گزینه‌ها هستند؛ به عنوان مثال فرض کنید مدیریت عالی یک سازمان تصمیم گرفته است که یک سیستم جدید کامپیوتری را بخرد و در سازمان نصب کند. در حال حاضر سه عرضه کنندهٔ سیستم کامپیوتری در بازار وجود دارد. مدیریت برای انتخاب سیستم مناسب، یک گروه سه نفره تشکیل داده است که او را در خرید سیستم یاری دهد.

مرحله اساسی در این تصمیم، تعیین فاکتورهایی است که براساس آنها گزینه‌های رقیب (سیستم‌های ۱ و ۲ و ۳) با همدیگر مقایسه شوند. تعیین این فاکتورها در تصمیمات انفرادی چندان مشکل نیست چرا که خود تصمیم‌گیرنده این عوامل را به شخصه تعیین می‌کند. در حالی که ممکن است این عوامل در تصمیم‌گیریهای گروهی به دلیل اختلاف علائق و تخصص افراد متعدد باشد؛ در این مرحله استفاده از فنون معمول تصمیم‌گیری گروهی می‌تواند کارساز باشد. توصیه معمول در این زمینه آن است که با استفاده از تکنیک دلفی مهمترین فاکتورها تعیین گردند. تکنیک دلفی روشی است که با توزیع پرسشنامه میان متخصصان، نظر و عقاید آنها را جمع‌آوری می‌کند و طی مراحلی به نظر اکثریت می‌رساند؛ این مراحل عبارتند از:

۱- به هر یک از اعضای گروه، به طور جداگانه و محرمانه پرسشنامه‌ای که دربردارنده تمام فاکتورهای مورد نظر است داده می‌شود و از عضو گروه خواسته می‌شود که به هر یک از فاکتورها نمره‌ای از ۱ تا ۱۰ اختصاص دهد. در مثال ما، این فاکتورها می‌تواند قیمت، شهرت عرضه کننده سیستم، نرم افزار، سخت افزار، خدمات پس از فروش، هزینه نصب و ... باشد.

۲- پرسشنامه دربردارندهٔ نمره‌های اعضای گروه در یک ایستگاه مرکزی جمع‌آوری می‌گردد. آن دسته از فاکتورهایی که نمره‌های کمتر از ۷ به ازای تک تک اعضا گرفته‌اند حذف می‌گردند. دوباره پرسشنامه اصلاح شده و برای اعضا فرستاده می‌شود تا مجدداً عوامل باقی مانده نمره‌گذاری شوند.

این مراحل آنقدر تکرار می‌شوند تا فاکتورهایی که به طور اجماع نمره‌ای بیشتر از هفت گرفته‌اند مشخص گردند. مشخص است که این روش بسیار وقت‌گیر است. روش سریعتر این است که در همان دور اول از نمره‌های اعضا که به هر فاکتور داده شده است، متوسط گیری شود و عواملی که نمره‌ای بیشتر از هفت کسب کرده‌اند جزء فاکتورهای نهایی انتخاب گردند.

در این راستا عوامل مهم برای مقایسه سیستمهای مثال ما پس از اجرای این روش، عبارتند از: *نرم افزار*، *سخت افزار و خدمات پس از فروش*؛ به عبارت دیگر سیستمهای ۱، ۲ و ۳ با استفاده از این فاکتورهای سه گانه مورد مقایسه قرار می‌گیرند. حال می‌توان ساختاردرخت‌سلسله‌مراتب را برای مثال طرح شده چنین نوشت:

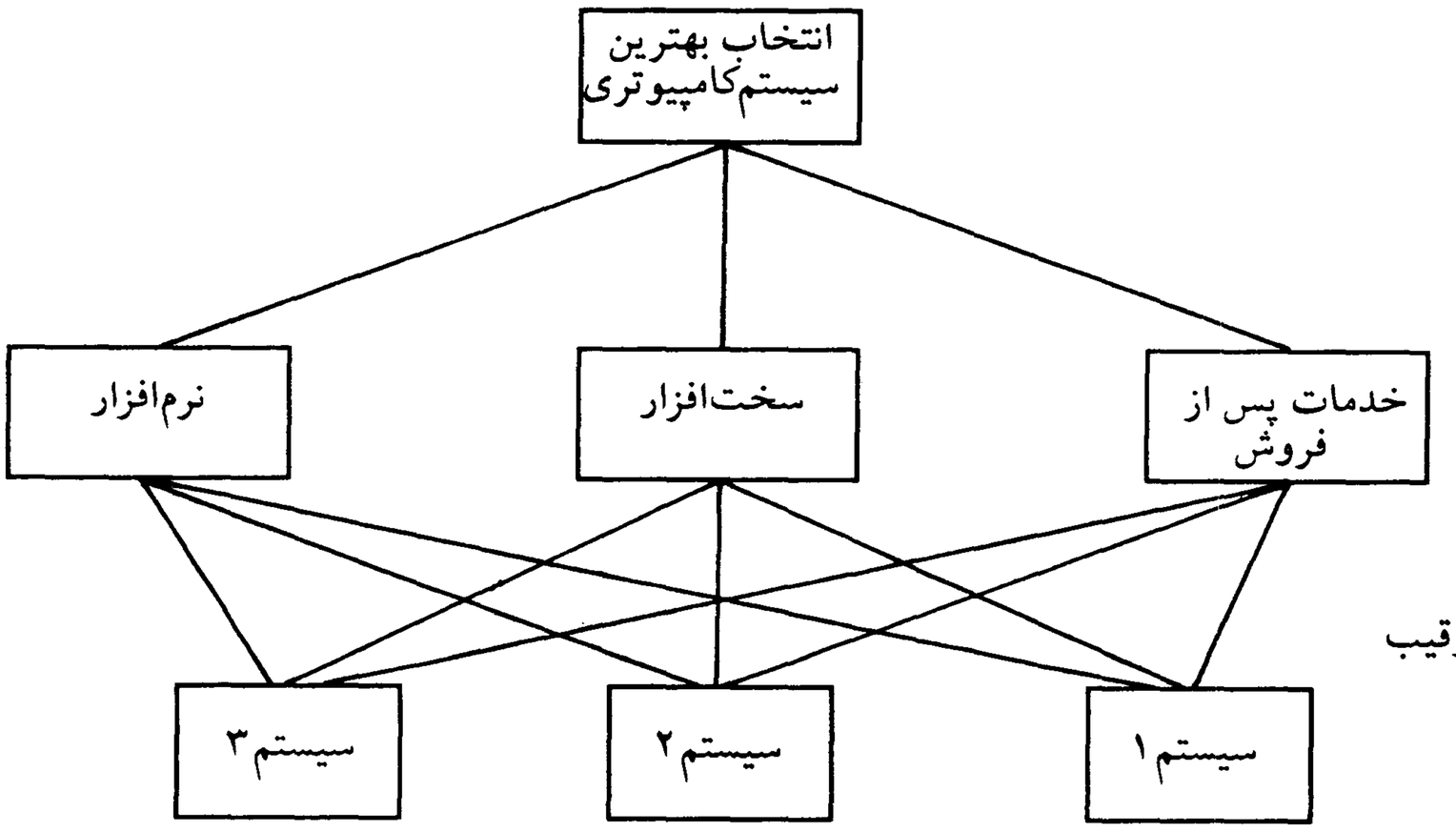
سطح یک (هدف): انتخاب بهترین سیستم کامپیوتری است.

سطح دو (فاکتورها): نرم‌افزار، سخت افزار و خدمات پس از فروش را در برمی‌گیرد.

سطح سه (گزینه‌های رقیب): سیستم یک، دو و سه است.

شکل شماره ۱ روابط بین این سه سطح را به وضوح نشان می‌دهد.

از این مرحله به بعد عملیات ریاضی AHP به منظور رسیدن به هدف (تصمیم بهینه) آغاز می‌گردد. این عملیات در قالب مراحل ۱ تا ۴ با استفاده از افته[15] طرح شده تشریح می‌شوند (برای درک مفاهیم ریاضی به پیوست الف مراجعه شود).



شکل شماره ۱ - درخت سلسله مراتب تصمیم برای انتخاب بهترین سیستم کامپیوتری

مرحله اول - مقایسات زوجی

جدولهای مقایسه‌ای براساس درخت سلسله مراتب از پایین به بالا تهیه می‌شوند؛ به عبارت دیگر، گزینه‌های رقیب در سطح۳ باید به واسطه هر یک از فاکتورها در سطح ۲ مورد مقایسه دوبه‌دو قرار گیرند. مقایسه دوبه‌دو با استفاده از مقیاسی که از ترجیح یکسان تا بی‌اندازه مرجح، طراحی شده است انجام می‌گیرد. تجربه نشان داده است که استفاده از $\frac{1}{9}$ تا ۹ تصمیم‌گیرنده را قادر می‌سازد تا مقایسات را به گونه‌ای مطلوب انجام دهد. به همین علت استفاده از جدول شماره ۱ در امتیاز دهی مقایسه‌ای به صورت یک مقیاس استاندارد درآمده است.

هنگام مقایسه دوبه‌دو، در آغاز باید معادل اهمیت دوبه‌دو به طریق رتبه‌ای مشخص گردد، سپس مقدار عددی متناظر با آن در جدول مقایسه آورده شود؛ در مثال ما، فرض کنید که عضو شماره یک، سیستم یک را به سیستم دو به جهت سخت‌افزار نسبتاً مرجح می‌داند. بنابر این مقدار عددی ۳ را در جدول مقایسه قرار می‌دهد. همچنین وی سیستم یک را به دو از جهت سخت‌افزار بی‌اندازه ترجیح می‌دهد، پس عدد ۹ را برمی‌گزیند و نهایتاً در مقایسه سیستم دو با سیستم سه عدد ۶ یعنی قویاً تا بسیار قوی مرجح را انتخاب می‌کند. حاصل مقایسه این عضو گروه، جدول شماره دو است؛ این جدول نشان دهنده مقایسات زوجی

مقدار عددی	درجه اهمیت در مقایسهٔ دوبه‌دو
۱	ترجیح یکسان
۲	یکسان تا نسبتاً مرجح
۳	نسبتاً مرجح
۴	نسبتاً تا قویاً مرجح
۵	قویاً مرجح
۶	قویاً تا بسیار قوی مرجح
۷	ترجیح بسیار قوی
۸	بسیار تا بی‌اندازه مرجح
۹	بی‌اندازه مرجح

جدول شماره ۱ - مقیاس مقایسه دوبدو در AHP

سیستمها نسبت به عامل سخت‌افزار توسط عضو شماره یک گروه‌است.

طبیعی است که قطر ماتریس با عدد یک مشخص می‌شود چر

سیستم ۳	سیستم ۲	سیستم ۱	سخت‌افزار
۹	۳	۱	سیستم ۱
۶	۱		سیستم ۲
۱			سیستم ۳

جدول شماره ۲ - ماتریس مقایسه‌ای سیستمها نسبت به عامل سخت افزار توسط عضو شماره ۱

که ترجیح هر سیستم به خودش یکسان است. ماتریس مقایسه‌ای در AHP یک ماتریس معکوس[16] است؛ یعنی اینکه اگر ترجیح سیستم یک به دو ۳ است پس ترجیح سیستم دو به یک $\frac{1}{3}$ است. حال می‌توان جدول شماره ۲ را به شرح زیر تکمیل کرد:

سیستم ۳	سیستم ۲	سیستم ۱	سخت‌افزار
۹	۳	۱	سیستم ۱
۶	۱	$\frac{1}{3}$	سیستم ۲
۱	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	سیستم ۳

جدول شماره ۳ - ماتریس مقایسه‌ای تکمیل شده عضو شماره یک گروه

ماتریس مقایسه‌ای سیستمها نسبت به سخت افزار به طریق مشابه توسط دو عضو دیگر در جدولهای شماره ۴ و ۵ آمده است:

سیستم ۳	سیستم ۲	سیستم ۱	سخت‌افزار
۴	۲	۱	سیستم ۱
۳	۱	$\frac{1}{2}$	سیستم ۲
۱	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	سیستم ۳

جدول شماره ۴ - ماتریس مقایسهٔ سیستمها نسبت به فاکتور سخت افزار توسط عضو شماره ۲

در اینجا مدیریت سازمان با سه نظر متفاوت برای هر یک از فاکتورها روبروست؛ حال این سؤال پیش می‌آید که مدیریت چگونه این نظریات را به یک نظر واحد تبدیل کند تا بر اساس آن تصمیم بگیرد.

سیستم ۳	سیستم ۲	سیستم ۱	سخت‌افزار
۶	۲	۱	سیستم ۱
۴	۱	$\frac{1}{2}$	سیستم ۲
۱	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	سیستم ۳

جدول شماره ۵ - ماتریس سیستمها نسبت به فاکتور سخت‌افزار توسط عضو شماره ۳

روش رایج برای ترکیب این سه جدول مقایسه‌ای، این است که هر سه عضو دور همدیگر جمع شوند و در جلسه‌ای با حضور مدیر سازمان به یک نظر واحد (اجماع)[17] در خصوص هر مؤلفه از جدول مقایسه‌ای برسند. محققین استفاده از چنین روشی را برای تلفیق کردن نظریات اعضاء گروه به هیچ وجه پیشنهاد نمی‌کنند؛ چرا که استفاده از این روش عملاً جدول مقایسه‌ای هر عضو را بی‌خاصیت خواهد ساخت. به علاوه معایبی که برای تصمیم‌گیری گروهی شمرده شد در اینجا نیز مصداق خواهد داشت.

یکی دیگر از بهترین روشها برای ترکیب جدولهای مقایسه‌ای اعضای گروه، استفاده از میانگین هندسی[18] است. میانگین هندسی به مدیریت عالی کمک خواهد کرد ضمن در نظر گرفتن قضاوت هر عضو به قضاوت گروه دربارهٔ هر مقایسه زوجی برسد. از آنجا که مقایسات زوجی داده‌هایی به صورت «نسبت» ایجاد خواهد کرد، میانگین هندسی از نظر ریاضی بهترین میانگین برای آنهاست. به علاوه معکوس بودن ماتریس مقایسه استفاده از این میانگین را بیشتر از هر چیز موجه می‌سازد. همچنانکه ساعتی و اکزل[19] نشان داده‌اند، میانگین هندسی، مناسبترین قاعده ریاضی برای ترکیب قضاوتها در AHP است. به این خاطر که این میانگین خاصیت معکوس بودن را در ماتریس مقایسه زوجی حفظ می‌کند.

فرض کنید؛ $a_{ij}^{(k)}$ مؤلفه مربوط به شخص k ام برای مقایسه سیستم i به سیستم j است؛ بنابر این میانگین هندسی برای تمامی مؤلفه‌های متناظر به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$1)\ \bar{a}_{ij} = \left(\prod_{k=1}^{N} a_{ij}^{(k)}\right)^{1/N}$$

رابطه ۱ زمانی به کار گرفته می‌شود که نظریات اعضای گروه از درجه اهمیت یکسانی برخوردار باشد. به عبارت دیگر مدیر بین اعضاء به جهت صائب بودن نظر آنها فرقی قائل نیست.

ما این فرض را می‌پذیریم و جدولهای شماره ۳ و ۴ و ۵ را با استفاده از رابطه ۱ با همدیگر تلفیق می‌کنیم. نتیجه محاسبات در جدول شماره ۶ آمده است. به عنوان نمونه:

$$\overline{a}_{12} = (a^{(1)}_{12} \times a^{(2)}_{12} \times a^{(3)}_{12})^{\frac{1}{3}} = (۳ \times ۲ \times ۲)^{\frac{1}{3}} = ۲/۲۸۹۴$$

	سیستم۳	سیستم۲	سیستم۱	سخت‌افزار
سیستم ۱	۶	۲/۲۸۹۴	۱	
سیستم ۲	۴/۱۶۰۲	۱	۰/۴۳۶۸	
سیستم ۳	۱	۰/۲۴۰۴	۰/۱۶۶۷	

جدول شماره ٦ - ماتریس مقایسه سیستم‌هانسبت به سخت‌افزار ازنظر گروه

ماتریس مقایسه گروهی به طریق مشابه برای فاکتورهای نرم‌افزار و خدمات پس از فروش تهیه می‌گردد. در اینجا برای رعایت اختصار از چگونگی عملیات آنها صرف نظر می‌گردد و صرفاً خلاصه نتایج آنها در زمان تصمیم‌گیری آورده خواهد شد.

یکی از نکات بسیار مهم در تصمیم‌گیری گروهی، میزان صائب بودن نظر هر یک از اعضای تیم است. در این خصوص، نظر هر یک از اعضاء ممکن است دارای ضریب اولویت (اهمیت) ویژه‌ای باشد. مثلاً، رأی اعضای گروه در سازمان مورد نظر ما به ترتیب دارای اهمیت ۳، ۱ و ۲ برای مدیریت هست. مدل طراحی شده در AHP قابلیت در نظر گرفتن این اوزان را دارد. در چنین مواردی مؤلفه‌های ماتریس گروهی به شرح زیر محاسبه می‌گردد:

$$2)\ \overline{a}_{ij} = \left(\prod_{k=1}^{L} a_{ij}^{w_k}\right)^{1/N}$$

به گونه‌ای که:

$$\sum_{k=1}^{L} w_k = N$$

روشن است که چنانچه مدیریت، توانایی تعیین اهمیت آرای اعضا را به شکل مطلق نداشته باشد، می‌تواند از یک AHP برای تعیین‌اهمیت هر عضو استفاده کند. در چنین مواردی چون $\sum_{k=1}^{L} w_k$ برابر یک خواهد شد، نیاز به ریشه $\frac{1}{N}$ نخواهد بود. بنابر این رابطه ۲ به شرح زیر نوشته می‌شود:

$$3)\ \overline{a}_{ij} = \left(\prod_{k=1}^{L} a_{ij}^{w_k}\right)$$

در مثال ما، مدیریت سازمان، زمانی که گروه فاکتورهای تصمیم‌گیری (سطح دو) را با همدیگر مقایسه می‌کنند، اوزان سه، یک و دو را به ترتیب برای نفراول، دوم و سوم ($w_1 = ۳$ و $w_2 = ۱$ و $w_3 = ۲$) در نظر گرفته است. این اوزان نشان دهنده رأی هر نفر در مقایسه با سایر اعضا می‌باشد. این در حالی است که وزن هر یک از اعضا هنگامی که سیستمهای سطح یک را به نسبت فاکتورها مقایسه می‌کردند برابر یک بود؛ به عبارت دیگر، نظر آنها در چنین مقایساتی همسان تلقی شده است.

اگر جدولهای شماره ۷ و ۸ و ۹ نشان دهنده رأی هر یک از اعضای گروه در خصوص مقایسه فاکتورها با همدیگر باشد، با استفاده از رابطه ۲ می‌توان میانگین هندسی هر مؤلفه a_{ij} را برای قضاوت گروه به دست آورد. به عنوان نمونه مؤلفه $\overline{a}_{12}$ در جدول شماره ۱۰ به صورت زیر به دست آمده است:

$$\overline{a}_{12} = (a^{w_1}_{12} \times a^{w_2}_{12} \times a^{w_3}_{12})^{1/N} = [(\tfrac{1}{8})^{3} (۲) (\tfrac{1}{4})^{2}]^{\frac{1}{6}} = \tfrac{1}{4}$$

خلاصه محاسبات برای هر یک از مؤلفه‌های ماتریس قضاوت گروه در جدول شماره ۱۰ آمده است:

	خدمات‌پس‌ازفروش	نرم‌افزار	سخت‌افزار	فاکتورها
سخت‌افزار	۱/۴	۱/۸	۱	
نرم‌افزار	۲	۱	۸	
خدمات‌پس‌ازفروش	۱	۱/۲	۴	

جدول شماره ۷ - ماتریس مقایسه فاکتورها نسبت به هم توسط عضو شماره۱

	خدمات‌پس‌ازفروش	نرم‌افزار	سخت‌افزار	فاکتورها
سخت‌افزار	۵	۲	۱	
سخت‌افزار	۳	۱	۱/۲	
خدمات‌پس‌ازفروش	۱	۱/۳	۱/۵	

جدول شماره ۸- ماتریس مقایسه فاکتورها نسبت به هم توسط عضو گروه ۲

فاکتورها	سخت‌افزار	نرم‌افزار	خدمات پس‌ازفروش
سخت‌افزار	۱	$\frac{۱}{۴}$	۲
نرم‌افزار	۴	۱	۸
خدمات پس‌ازفروش	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۸}$	۱

جدول شماره ۹- ماتریس مقایسه فاکتورها نسبت به هم توسط عضو شماره۳

فاکتورها	سخت‌افزار	نرم‌افزار	خدمات پس‌ازفروش
سخت‌افزار	۱	۰/۲۵	۰/۸۲۳۸
نرم‌افزار	۴	۱	۳/۳۹۶۸
خدمات پس‌ازفروش	۱/۲۱۳۹	۰/۲۹۴۴	۱

جدول شماره ۱۰- ماتریس مقایسهٔ فاکتورها نسبت به هم توسط گروه

گام‌دوم:استخراج‌اولویتهاازجدولهای‌مقایسه‌گروهی

برای استخراج اولویت صرفاً جدولهای مقایسه گروه را در نظر می‌گیریم. برای تعیین اولویت از مفهوم نرمال سازی[۲۰] و میانگین موزون[۲۱] استفاده می‌شود. برای نرمال سازی روشهای متعددی وجود دارد. در AHP برای نرمال کردن اعداد جدولهای مقایسه‌ای، از رابطه ۴ استفاده می‌شود.

$$۴)\ r_{ij} = \frac{\bar{a}_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_{ij}}$$

که در آن r_{ij} مؤلفه نرمال شده است؛ به عنوان مثال، مقادیر نرمال شده جدول شماره ۶ که مربوط به مقایسه گروهی سیستمها نسبت به فاکتور سخت‌افزار است در جدول شماره ۱۱ آمده است.

پس از نرمال کردن از مقادیر هر سطر میانگین موزون (با ضریب $\frac{۱}{۳}$) گرفته می‌شود. مقادیر حاصل از میانگین موزون نشاندهنده اولویت (درجه اهمیت) هر گزینه رقیب (سیستم) است. این ضرایب برای افته طرح شده نسبت به فاکتور سخت افزار در ستون آخر جدول شماره ۱۱ تحت عنوان اولویت آمده است. براساس مقادیر حاصل گروه بیشترین اهمیت را برای سیستم یک قائل شده‌اند که مقدار آن ۰/۶۰۳۳ است.

اولویت	سیستم۳	سیستم۲	سیستم۱	سخت‌افزار
۰/۶۰۳۳	۰/۵۳۷۶	۰/۶۴۸۶	۰/۶۲۳۶	سیستم۱
۰/۳۰۹۵	۰/۳۷۲۸	۰/۲۸۳۱	۰/۲۷۲۴	سیستم۲
۰/۰۸۷۲	۰/۰۸۹۶	۰/۰۶۸۱	۰/۱۰۴۰	سیستم۳

جدول شماره ۱۱ - مقادیر نرمال شده جدول شماره ۶

محاسبات مربوط به قضاوت گروه در خصوص مقایسه سیستمها نسبت به فاکتورهای نرم‌افزار و خدمات پس از فروش انجام گرفته است که خلاصه این محاسبات به علاوه نتایج جدول شماره ۱۱، در جدول شماره ۱۲ آمده است. همچنین اولویت هر یک از فاکتورها با استفاده از جدول شماره ۱۰ محاسبه شده است که در ردیف اول جدول شماره ۱۲ ذکر شده‌اند.

فاکتور / سیستم	سخت‌افزار	نرم‌افزار	خدمات پس از فروش
	۰/۱۶۰۲	۰/۶۴۷۳	۰/۱۹۲۵
سیستم ۱	۰/۶۰۳۳	۰/۰۹۱۷	۰/۲۵۱۰
سیستم ۲	۰/۳۰۹۵	۰/۷۱۱۲	۰/۰۹۳۷
سیستم ۳	۰/۰۸۷۲	۰/۱۹۷۱	۰/۶۵۵۳

جدول شماره ۱۲- خلاصه محاسبات نرمال سازی و میانگین موزون برای انتخاب بهترین سیستم

همچنان که اطلاعات فوق نشان می‌دهد، اهمیت سیستمها از جهت فاکتورها با همدیگر فرق می‌کند. اگر صرفاً ملاک تصمیم‌گیری سخت‌افزار باشد، مدیریت باید سیستم یک را به عنوان بهترین سیستم برای نصب در سازمان برگزیند. در حالی که فاکتور نرم‌افزار نشان می‌دهد که بهترین سیستم، شماره «دو» است.

حال این سؤال پیش می‌آید که این تناقض را چگونه می‌توان حل کرد. گام سوم، مرحلهٔ اصلی تصمیم‌گیری و در واقع راه حلی برای رفع این تناقض است.

گام سوم: انتخاب بهترین گزینه

برای انتخاب بهترین سیستم لازم است که مقادیر هر ردیف (سیستم) در مقادیر متناظر فاکتورها ضرب شوند. این محاسبه ریاضی چیزی جز میانگین موزون برای هر سیستم نیست. حال میانگین موزون به صورت زیر برای هر سیستم حاصل می‌گردد:

$$\begin{vmatrix} ۰/۲۰۴۳ \\ ۰/۵۲۸۰ \\ ۰/۲۶۷۷ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (۰/۱۹۲۵)(۰/۲۵۱۰)+(۰/۰۹۱۷)(۰/۶۴۷۳)+(۰/۱۶۰۲)(۰/۶۰۳۳) \\ (۰/۱۹۲۵)(۰/۰۹۳۷)+(۰/۷۱۱۲)(۰/۶۴۷۳)+(۰/۱۶۰۲)(۰/۳۰۹۵) \\ (۰/۱۹۲۵)(۰/۶۵۵۳)+(۰/۱۹۷۱)(۰/۶۴۷۳)+(۰/۱۶۰۲)(۰/۰۸۷۲) \end{vmatrix}$$

بردار حاصل نشان دهنده اولویت سیستمهاست.

نتیجه اینکه، مدیریت سازمان، سیستم دو را به عنوان بهترین سیستم انتخاب خواهد کرد. چرا که بیشترین اولویت (۰/۵۲۸۰) مربوط به این سیستم است.

گام چهارم: نرخ سازگاری[۲۲]

اهمیت AHP ، علاوه بر ترکیب سطوح مختلف سلسله مراتب تصمیم و در نظر گرفتن عوامل متعدد، در محاسبه نرخ سازگاری (C.R.) است. نرخ سازگاری، مکانیزمی است که سازگاری مقایسات را مشخص می‌کند. این مکانیزم نشان می‌دهد که تا چه اندازه می‌توان به اولویتهای حاصل از اعضای گروه و یا اولویتهای جدولهای ترکیبی اعتماد کرد. گاهی اوقات ممکن است که مقایسات انجام شده توسط تصمیم‌گیرنده سازگار نباشد؛ برای مثال اگر اولویت سیستم یک به دو توسط یکی از اعضای دو در نظر گرفته شود و اولویت سیستم دو به سه برابر ۳ تعیین شود، در این صورت باید اولویت سیستم یک به سه ۶ تعیین گردد. در حالی که چون مقایسات دوبه‌دو انجام می‌گیرد ممکن است تصمیم گیرنده اولویت سیستم یک به دو را عددی غیر از ۶ تعیین کند. در این صورت ناسازگاری در مقایسات حاصل می‌گردد.

تجربه نشان داده است که اگر نرخ سازگاری (C.R.) کمتر از ۰/۱۰ باشد، می‌توان سازگاری مقایسات را پذیرفت. در غیر این صورت باید مقایسات مجدداً انجام گیرد. برای مقایسه نرخ سازگاری، تحقیقات متعددی صورت گرفته است که بهترین روش آن استفاده از بردارهای ویژه[۲۳] است. در اینجا به منطق ریاضی این روش اشاره‌ای نمی‌شود ولی از فرایند آن برای محاسبه C.R. جدول شماره ۶ استفاده می‌شود. عملیات انجام شده به شرح زیر تشریح می‌گردد:

الف) با استفاده از منطق نرمال سازی و میانگین موزون، اولویت هر یک از سیستمها نسبت به سخت‌افزار مشخص می‌شود. این عمل در گام دو تشریح شد. در گام دو، اولویت سیستمها به ترتیب (۰/۶۰۳۳، ۰/۳۰۹۵ و ۰/۰۸۷۲) تعیین گردید.

ب) بردار مجموع وزنی (WSV)[۲۴] محاسبه شود. در اینجا مقادیر اصلی مقایسات در جدول شماره ۶ در اولویت سیستمها به شرح زیر ضرب می‌شود و در نهایت مجموع هر سطر حاصل می‌گردد:

$$\begin{vmatrix} ۱/۸۳۵۱ \\ ۰/۹۳۵۸ \\ ۰/۲۶۲۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (۰/۰۸۷۲)(۶) + (۰/۳۰۹۵)(۲/۲۸۹۴) + (۰/۶۰۳۳)(۱) \\ (۰/۰۸۷۲)(۴/۱۶۰۲) + (۰/۳۰۹۵)(۱) + (۰/۶۰۳۳)(۰/۴۳۶۸) \\ (۰/۰۸۷۲)(۱) + (۰/۳۰۹۵)(۰/۲۴۰۴) + (۰/۶۰۳۳)(۰/۱۶۶۷) \end{vmatrix}$$

ج) بردار سازگاری[۲۵] (C.V.) محاسبه شود. این بردار با تقسیم هر یک از مؤلفه‌های WSV بر اولویت سیستمها نسبت به فاکتورها (در اینجا سخت‌افزار) حاصل می‌گردد.

$$C.V. = \begin{vmatrix} ۱/۸۳۵۱/۰/۶۰۳۳ \\ ۰/۹۳۵۸/۰/۳۰۹۵ \\ ۰/۲۶۲۲/۰/۰۸۷۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳/۰۴۱۸ \\ ۳/۰۲۳۶ \\ ۳/۰۰۶۹ \end{vmatrix}$$

د) مقدار λ_{max} محاسبه شود. مقدار λ_{max} عبارت است ازمیانگین C.V.

$$\lambda_{max} = (۳/۰۴۱۸ + ۳/۰۲۳۶ + ۳/۰۰۶۹)/۳ = ۳/۰۲۴۱$$

هـ) شاخص سازگاری[۲۶] (CE) محاسبه شود. پروفسور ساعتی نشان داده است که شاخص سازگاری برای مقایسات انفرادی براساس رابطه ۵ و برای مقایسات گروهی براساس رابطه ۶ تعریف می‌شود (برای درک ریاضی و اثبات به پیوست ب

مراجعه شود).

$$۵)\ C.I = \frac{\lambda_{max}-n}{n-1} \qquad ۶)\ C.I = \frac{\lambda_{max}-n}{n}$$

در اینجا n بیان کننده تعداد گزینه‌های رقیب (در این افته ۳ = n) است. بنابر این مقدار شاخص سازگاری در این افته برابر است با:

$$C.I. = \frac{۳/۰۲۴-۳}{۳} = ۰/۰۰۸$$

و) نرخ سازگاری (C.R.) محاسبه شود. نرخ سازگاری عبارت است از:

$$۷)\ C.R. = \frac{C.I.}{R.I.}$$

که در آن R.I[۲۷] نشان دهنده مقدار شاخص تصادفی است. این شاخص از جدول شماره ۱۳ که توسط ساعتی و هارکر[۲۸] تهیه شده است استخراج می‌گردد.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
R.I	۰	۰	۰/۵۸	۰/۹۰	۱/۱۲	۱/۲۴	۱/۳۲	۱/۴۱
n	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	—
R.I	۱/۴۵	۱/۴۹	۱/۵۱	۱/۴۸	۱/۵۶	۱/۵۷	۱/۵۹	—

جدول شماره ۱۳ - شاخص سازگاری تصادفی (R.I.)

در افته ما چون n = ۳ است، پس R.I = ۰/۵۸ خواهد شد. نتیجتاً:

$$C.R. = \frac{۰/۰۰۸}{۰/۵۸} = ۰/۰۱۳۸$$

در تحلیل مقدار به دست آمده C.R. می‌توان گفت که مقایسات زوجی گروه در جدول شماره ۶ از سازگاری برخوردار است. چرا که مقدار ۰/۰۱۳۸ از مقدار تجربی ۰/۱۰ کمتر است. مقدار C.R. مقایسات انفرادی و گروهی جدولهای ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ و ۱۰ در جدول شماره ۱۴ خلاصه شده است:

شماره جدول	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
C.R.	۰/۰۴۷	۰/۰۱۶	۰/۰۰۸	۰/۰۱۴	۰	۰/۰۰۳	۰	۰

جدول شماره ۱۴ - خلاصه محاسبات نرخ سازگاری جدولهای مقایسه‌ای تهیه شده در مقاله

خلاصه

تاکنون روشهای متعددی در مدیریت برای تصمیم‌گیری گروهی همچون تکنیک گروه اسمی، دلفی و طوفان مغزی مطرح شده‌اند که هر یک از آنها دارای معایبی از جهت زمان، هزینه و جمود فکری بوده‌اند. AHP تکنیک نوینی است که تا حدودی این مشکلات را حل می‌کند. این روش نه تنها محاسن روشهای فوق را در بردارد بلکه به لحاظ منطق ریاضی آن قابلیت تلفیق معیارهای کمّی و کیفی را برای مقایسه گزینه‌های متعدد دارد.

بنیان AHP بر ساختن درخت سلسله مراتب تصمیم استوار است. اعضای گروه باید در ابتدا سلسله مراتب تصمیم را بسازند. در این درخت سطح اوّل بیان کننده هدف و سطح آخر نشان دهندهٔ گزینه‌های رقیب و سطوح میانی فاکتورهای تصمیم‌گیری را نشان می‌دهد.

اعضای گروه هر یک به طور جداگانه جدولهای مقایسه‌ای را برحسب سطوح (از پایین به بالا) بر اساس جدول شماره ۱ از $\frac{۱}{۹}$ تا ۹ تشکیل می‌دهند. این جدولها براساس مقایسه دوبه‌دو تهیه می‌شوند. فرض اساسی در این مقایسه آن است که هیچ گاه تصمیم‌گیرنده اولویت یک گزینه به دیگری را بی‌نهایت (یا صفر) فرض نمی‌کند. پس از تهیه این جدولها، با استفاده از میانگین هندسی، جدولهای قضاوت گروه تهیه می‌شوند. در نهایت با استفاده از منطق نرمال سازی و میانگین موزون تمام جدولها در سطوح مختلف برای رسیدن به تصمیم بهینه ترکیب می‌شوند.

برای سنجش سازگاری، مقایسات دوبه‌دو، شاخص C.R. با استفاده از منطق ریاضی بردارهای ویژه محاسبه می‌شود. اگر این شاخص کمتر از ۰/۱۰ باشد جدول مقایسه سازگار است وگرنه لازم است در مقایسات تجدید نظر به عمل آید.

سخن آخر اینکه مراحل قید شده در این مقاله قابل گسترش به هر مدل تصمیم‌گیری با n سطح و n عضو شرکت کننده در گروه هست.

پانویسها

1- The Analytic Hierarchy Process (AHP) A Technique for Group Decision Making.

2- Groupthink.

3- Brain Storming.

4- Delphi Technique.

5- Nominal Group Technique.

6- Multi Attribution Decision Making.

7- Thomas L. Saaty.

8- Alternatives.

9- Criteria or Factors.

10- Pairwise Comparisons.

11- Hierarchy Decision Tree.

12- Fuzzy Environment.

13- Levels.

14- Goal.

15- Case.

16- Reciprocal Matrix.

17- Consensus Agreement.

18- Geometric Average.

19- Saaty and Aczel.

20- Normalize.

21- Weighted Average.

22- Consistency Ratio (C.R.).

23- Eigen Vectors.

24- Weighted Sum Vector (W.S.V.).

25- Consistency Vector (C.V.).

26- Consistency Index (C.I).

27- Random Index (R.I.).

۲۸- پرفسور Saaty and Harker جدولی تهیه کرده‌اند که نشان دهنده مقدار سازگاری است در حالتی که جدولهای مقایسات زوجی به طور کاملاً تصادفی تکمیل شده‌اند. نکته قابل توجه در این جدول آن است که این جدول براساس مقایسات زوجی انفرادی به دست آمده در حالی که در افته‌های گروهی نیاز به جدولی است که R.I. آن به کمک جدولهای مقایسات زوجی گروهی حاصل شده باشد. این امر باعث خواهد شد که منطق محاسباتی صورت (C.I.) ومخرج (R.I.)، C.R. متجانس نباشند و لذا محاسبه C.R. به لحاظ ریاضی با مشکلاتی همراه است.

منابع و مآخذ:

1- A. G. Lockett,B. Hetherington and Etall, **Modelling a Research portfolio using AHP: A Group Decision Process**, Research and Development Management, Vol. 16, 1986.

2- Bruce L. Golden, Edward A. Wasile and Paetrick T. Harker, **The Analytic Hierarchy Process: Application and Studies**, Springer - Velag, New York, 1990

3- B. Render and Ralph M. Stair, **Quantative Analysis for Management**, Third edition, Allyn and Bacon Inc., 1988.

4- E. A. Mecreary, **How to Drow A Decision Tree**, in H. Koontz and Etall, Management - A Book of Readings, 5th edition, McGrow Hill Company, 1980.

5- G. Desanctis and R. Gallupe, **A Foundation for the Study of Group Decision Support Systems**, Management Science, Vol. 33, 1987.

6- G. Huber and R. Mc Daneel, **The Decision Making Paradigm of Organiztion Design**, Management Science, Vol. 32, 1986.

7- J. R. Emshoff and T. L. Suaty, **Application of the Analytic Hierarchy Process To Long - Range Planning Processes**, European of Operational Research, Vol. 10, 1982.

8- L. Delbcq, H. Van and D.H. Gustafson, **Group Techniques for program Planning**, Scott, Forseman, Glenview III, 1975

9- Mintzberg H. and Etall, **The Structure of, unstructured Decision Processes**, Administrative Science Quarterly, Vol. 21, 1976.

10- Pual Hersey and k. Blanchard, **Management of Organization Behavior: Utilizing Human Resources**, Prentice - Hall Pub., Fifth Edition, 1988.

11- P. T. Harker and L. G. Vargas, **Theory of Ratio Scale Estimation: Saaty's Analytic Hierachy process**, Management Science, Vol. 33, 1987.

12- R. E. Jensen, **Comparison of Consensus Methods for Priority Ranking Problems**, Decision Science, Vol. 17, 1986.

13- R. W. Mondey and Etall, **Management: Concepts and Practices**, Forth Edition, Allyn and Bacon Inc. 1988

14- R. E. Bellman and L. A. Zadeh, **Decision Making in A Fuzzy Environment**, Management Science, Vol. 17, 1970.

15- S. Gass, **Decision Making, Models and Algorithms**, John Wiley and Son's, New York, 1985.

16- T. L. Saaty, **Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy process**, Management Science, Vol. 32, 1986.

17- T. L. Saaty and L. G. Vargas, **Uncertainly and Rank Ordering in the Analytic Hierarchy Process**, European Journal of Operational Research, Vol. 32, 1987.

18- T. L. Saaty, **Decision Making for Leaders: The Analytic Hierarchy Process for Decision in a Complex World**, Vol. II, RWS, Pub. 1990

19- T. L. Saaty, **Multicriteria Decision Making**, Vol. I RWS Publications, 1992.

20- T. L. Saaty, **Decision Making for Leaders** , Lifetime Learning Publication, California, 1982.

21- T. L. Saaty, **The Analytic Hierarchy Process**, McGraw Hill, New York, 1980.

22- V. Belton, **A Comparison of the Analytic Hierarchy Process and A Simple Multi - Attribute Value Function**, European Journal of Operational Research, Vol. 26, 1986.

۲۳ - اسفندیار سعادت، «نقدی بر مدل کلاسیک تصمیم‌گیری»، مجله دانش مدیریت، شماره نهم و دهم، ۱۳۶۹.

۲۴ - اسفندیار سعادت، «فرایند تصمیم‌گیری در سازمان»، انتشارات دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۷۲.

پیوست الف: اصول ریاضی AHP

در این پیوست، مفاهیم اولیه ریاضی که در AHP استفاده خواهد شد خلاصه می‌گردد. اولین عمل اصلی در AHP تخمین وزنها (w) است که از جدولهای مقایسات زوجی به دست می‌آیند. این جدولها به معیارها و گزینه‌های رقیب مربوط است. اگر ماتریس مقایسه زوجی را $A = a_{ij}$ بدانیم. پس A یک ماتریس مثبت و معکوس است. جایی که:

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ij}} \qquad \text{بازاء } i,j = 1 \text{ و } 2, \ldots, n$$

ما مایلیم که برداری از وزنها یا اولویتها را همانند $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ محاسبه کنیم. توجه داشته باشید که به خاطر استفاده از مقیاسهای نسبی (Ratio Scales) وزنهایی که تخمین زده می‌شوند به ضریبی از یک مقدار ثابت مثبت منحصر می‌شوند؛ به عبارت دیگر W معادل CW است که در آن $C>0$ است، بنابراین ما ناچار W را به گونه‌ای نرمالایز می‌کنیم که مجموع آن مساوی یک باشد.

اگر مقایسات زوجی کاملاً سازگار باشند، یعنی

$$a_{ik}\, a_{kj} = a_{ij} \qquad \text{بازاء } i,j,k = 1 \text{ و } 2, \ldots, n$$

پس مؤلفه‌های ماتریس A کاملاً سازگارند و هیچ گونه خطایی نخواهند داشت و می‌توان آن را با عبارت زیر بیان کرد:

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$$

این عبارت را می‌توان به صورت زیر نیز استنتاج کرد:

$$a_{ik}.a_{kj} = \frac{w_i}{w_k}\,\frac{w_k}{w_j} = \frac{w_i}{w_j} = a_{ij} \qquad \text{بازاء } i,j,k = 1 \text{ و } 2, \ldots, n$$

در این حالت؛ می‌توان هر ستون A را برای استخراج وزنهای نهایی به شرح زیر نرمالایز کرد:

$$w_i = \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} a_{kj}} \qquad \text{بازاء } i = 1 \text{ و } 2, \ldots, n$$

با وجود این، خطای در قضاوت همواره وجود دارد. بنابر این نتیجه نهایی استفاده از نرمال کردن ستون بستگی به این دارد که کدام ستون انتخاب شود. دو روش عمده برای تخمین وزنها وقتی که قضاوت همراه با خطاست وجود دارد: حداقل مجذور لگاریتمی (Logarithmic Least Squares = LLS) و روش بردار ویژه ساعتی. روش LLS ، وزنها (W) را به گونه‌ای که تابع هدف زیر حداقل گردد، تخمین می‌زند:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\ln a_{ij} - \ln w_i + \ln w_j)^2$$

روش ساعتی: وزنها را براساس منطق بردار ویژه محاسبه می‌کند که در آن W به عنوان بردار وزنی مربوط به عناصر ماتریس A در نظر گرفته می‌شود. به گونه‌ای که:

$$AW = \lambda_{max} W$$

جایی‌که λ_{max} حداکثرارزش‌ویژه‌ماتریس‌است‌یا

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j}{\lambda_{max}} \qquad \text{بازاء } i = 1 \text{ و } 2, \ldots, n$$

هر دو روش محاسن و معایبی دارند، اما شواهد تجربی و تئوریک نشان می‌دهد که متد بردار ویژه از کارآیی بیشتری

برخوردار است. بنابر این بردار ویژه به عنوان یک «روش طبیعی» (Natural) برای محاسبه وزنها مطرح شده است. روش بردار ویژه، همچنین یک مقیاس طبیعی برای سازگاری به دست می‌دهد. همچنان که ساعتی نشان داده است، λ_{max} همیشه بزرگتر یا مساوی n برای ماتریسهای مثبت و معکوس است و این مقدار مساوی است با n ، اگر و فقط اگر A یک ماتریس سازگار باشد. $(\lambda_{max} - n)$ مقیاس مناسبی برای سنجش ناسازگاری خواهد بود. با نرمال کردن این مقیاس به وسیله اندازه ماتریس تصمیم‌گیری شاخص سازگاری ساعتی (C.I.) به شرح زیر تعریف خواهد شد:

$$C.I. = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

برای هر اندازه از ماتریس n ، ماتریس تصادفی تولید می‌گردد و سپس مقدار میانگین C.I. آنها را شاخص تصادفی (R.I.) می‌نامند. ارزش این مقادیر در جدول شماره ۱۳ آمده است.

درنهایت برای اندازه‌گیری سازگاری ماتریس مقایسات زوجی شاخص C.R. به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$C.R. = \frac{C.I}{R.I}$$

در صورتی که ارزش C.R $\leq$ ۰/۱۰ باشد، سازگاری مقایسات پذیرفته می‌شود، وگرنه، باید در جدول مقایسات برای رسیدن به سازگاری قابل قبول تجدید نظر شود.

پیوست ب: اصول ریاضی شاخص C.I. در تصمیم‌گیری گروهی

در این پیوست به اثبات رابطه (۶) در متن مقاله پرداخته می‌شود.

اجازه دهید (a_{ij}) یک ماتریس مقایسه زوجی n×n باشد که با استفاده از میانگین هندسی قضاوت اعضای گروه شکل گرفته است و همچنین اجازه دهید که $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ وزنهایی باشدکه ازاین‌ماتریس‌استخراج شده‌اند. پس‌خواهیم‌دید که عبارت:

$$\frac{\sum_{i,j} a_{ij} w_j}{w_i} - n^2$$

فاصله نسبی a_{ij} را از سازگاری نشان خواهد داد. این امر ناشی از این حقیقت است که در وضعیت سازگاری کامل:

$$\frac{a_{ij} w_j}{w_i} = ۱$$

خواهد بود. از آنجا که

$$\sum_j a_{ij} w_j = \lambda_{max} w_j$$

یا

$$\sum_{i,j} a_{ij} w_j / w_i = n \lambda_{max}$$

چنانچه انحراف رابطه بالا از n^2 (آنچه که بیان کننده سازگاری کامل است) محاسبه شود و حاصل بر n^2 تقسیم گردد، شاخصی به دست خواهد آمد که انحراف نسبی را از سازگاری به ما خواهد داد به شرح زیر:

$$(n \lambda_{max} - n^2) / n^2 = (\lambda_{max} - n) / n$$

به طریق مشابه می‌توان انحراف نسبی هر عضو را از قضاوت گروه محاسبه کرد. اگر $(a_{ij}^{(k)})$ ماتریس قضاوت k امین فرد و $(w_1, w_2, ..., w_n)$ ، وزنهای محاسبه شده از ماتریس مقایسات زوجی گروه (a_{ij}) باشد،

پس

$$\sum_{i,j} a_{ij}^k \cdot \frac{w_j}{w_i} - n^2$$

انحراف نسبی قضاوت K امین فرد را از قضاوت گروه، خواهد داد. شاخص C.R. به طریق معمول محاسبه خواهد شد. برای اینکه قضاوت هر فرد با گروه به عنوان یک کل سازگاری داشته باشد، شاخص C.R. نباید از ۰/۱۰ بیشتر باشد. این استنتاج، تصمیم‌گیران عالی را یاری خواهد داد که افراد یا زیرگروه‌هایی که در تعارض (Odds) با گروه هستند، به راحتی شناسایی نمایند.

نگارندگان، نشان داده‌اند که نرخ سازگاری قضاوت گروه، علاوه بر این روش، قابل حصول از میانگین هندسی C.R. اعضای گروه نیز هست. به عبارت دیگر اگر $C.R.^{(k)}$ ،نرخ سازگاری k امین عضو گروه باشد، پس $(C.R.^{(k)})^{1/N}$ بیان کننده C.R. گروه است. صحت این رابطه در خصوص جدولهای شماره‌های ۶ و ۱۰ مقاله نشان داده شده است. N در این رابطه بیان کننده تعداد اعضای گروه است.